Mithila Research Institute Sanskrit Series—No. 3.

GENERAL EDITOR
MAHAMAHOPADHYAYA
DR. UMESHA MISHRA

PRINTED BY SHREE TARA KANT JHA, MITHILA ART PRESS, DARBHANGA AND PUBLISHED BY MAHAMAHOPADHYAYA DR. UMESHA MISHRA, M.A., D.LITT. DIRECTOR, MITHILA INSTITUTE OF POST-GRADUATE STUDIES AND RESEARCH IN SANSKRITA LEARNING, DARBHANGA, UNDER THE AUTHORITY OF THE STATE GOVERNMENT OF BIHAR.

FIRST EDITION 1954.

VIMANADALAVAKRAVICHARA

A Treatise on the Curvature of the Planetary Circles in Driggola

By

Pradhanacharya
Pandita Dayanatha Jha, Vishistavidvan
MITHILA SANSKRITA VIDYAPITHA
DARBHANGA

EDITED BY

MM. DR. UMESHA MISHRA

1361 FASLI

मिथिलासंस्कृतविपीठग्रन्थमाला–पुष्पम्—३

विमण्डलवक्रविचारः

—:*:—

विशिष्टविद्वद्-
ज्योतिर्विच्छ्रीदयानाथझा-
विरचितः

—:*:—

मिथिलासंस्कृतविद्यापीठाध्यक्षेण
सम्पाद्य प्रकाशतां नीतः

मूल्यं रूपकद्वयम्

NOTE BY THE GENERAL EDITOR

The Mithila Sanskrit Research Institute has been established by the Government of Bihar and is located at Darbhanga on a plot of land donated by the Maharajadhiraja Shri Kameshwara Singh Bahadur of Darbhanga. The foundation-stone of the Institute was laid down by the President of the Indian Union Dr. Rajendra Prasad on the 21st of November, 1951.

This Institute has been founded with a view to promote advanced research in various aspects of Sanskrit learning and to impart teaching of the Post-Graduate standard to a limited number of students in the stimulating environments of a residential community. It will serve as the meeting-ground of the traditional Sanskrit scholars and modern researchers so that while the traditional scholars may get training in modern methods of research, the sources of ancient learning and its depth may easily be available to the modern scholars. In so doing the Institute will aim at the preservation and rehabilitation of the traditional Indian scholarship in the field of modern learning and research.

The Institute mainly stands for higher researches based on authentic texts on modern scientific lines; so while individual researchers including the members of the staff may carry on research in particular subjects, the Institute as a whole will have some long-term as well as short-term programme of research and publication.

As a foundation f r carrying on research in the future and as a means of preserving useful source of materials, the Institute will take up the collection and survey of manuscripts and other important source materials available in Mithila in particular, and also in other parts of Bihar and elsewhere.

The Institute will not only promote and encourage research by individual scholars and students, but it will also

undertake specific projects which will be in the nature of team work produced by all or selected members of the staff working in close co-operation and association with one another and seeking the guidance and assistance of the Board of Advisers. From time to time, a programme or plan for the projects extending over a specified period will be drawn up and duties will be assigned to various members of the staff in connection with the fulfilment of that project. The following projects may, for example, be undertaken by the Institute from time to time :

(i) Editing the Puranas and the Upanisada on scientific lines.

(ii) Collection, survey and cataloguing of manuscripts and other important source materials available in Mithila and in other parts of Bihar.

(iii) Editing a series of rare and important old and new Sanskrit Texts.

(iv) Preparing a critical bibliography of research work done in Sanskrit topic-wise, up to the present day and preparing supplements subsequently.

(v) Preparing a comprehensive History of Sanskrit literature in all its branches based on original sources.

(vi) Preparing a chronology of Sanskrit authors and their works.

(vii) Preparing an annual band-book of information on Indological studies.

Other projects also may be undertaken from time to time.

The Institute will publish from time to time monographs, texts, critical editions, catalogues, bibliographies, critical works, research journals, etc. The publication will be confined principally to the work done at the Institute either through individual research of students, scholars and members of the staff or through the projects undertaken at the Institute.

With these aims and objects in view we have undertaken the publication of rare and important works of old and also of modern period in order to place before the scholarly world the past and present contributions of Sanskrit scholars to knowledge in a Sanskrit series under our 'short-term project of research programme'.

PREFACE

In pursuance of the declared objects of the *Mithila Research Institute*, Darbhanga, we are presenting herewith the **Vimandalavakravichara** to the world of scholars as the third volume of the *Mithila Research Instittute Sanskrit Series.* The author, Pandita Dayanatha Jha, the ex-Principal of the Dharmasamaja College, Muzaffarpur, is one of the top-ranking astronomers of the present-day Mithila. He is also our respected colleague in the Institute.

In the present treatise on the problem, the author has tried to improve upon and make further investigation on the problem on the lines suggested by the late Mahamahopadhyaya Pandita Sudhakara Dwivedi, the well-known scholar of Banaras. This Vimandala, Curvature theory, has not been even discussed by European learned astronomers, like Kern, God-Fray, Parker, etc. The present work is a result of a long experience of the scholar and it is expected that it will give an opportunity to the astronomers of the Traditional and Scientific Schools to carry on further researches on the subject.

An effort is made here in the Institute to make the best use of the experiences and studies of our traditional Vishistavidvans by encouraging them to make contributions to our knowledge in their own respective field through their writings. But it is not for us to say how far our efforts will be successful, for we are one with Kalidasa when he says—

'आ परितोषाद्विदुषां न साधु मन्ये प्रयोगविज्ञानम्' ।

Meantime, I must thank the Government of Bihar for enabling me to start the series within a couple of years from the inception of the Institute.

Thanks are due to the authorities of the Mithila Art Press, Darbhanga, but for whose ungrudging efforts the volume could not have come out in such a form and in such a short time.

Vaishakha Purnima
1361 FASLI

UMESHA MISHRA

प्रधानसम्पादकीयामुखम्

जनकयाज्ञवल्क्यादिपवित्रीकृते मिथिलामण्डले दरभङ्गानगरे महाराजाधिराजेन श्रीमता कामेश्वरसिंहबहादुरेण दानरूपेण प्रदत्ते बृहद्भूभागे एकपञ्चाशदुत्तरैकोनविंशतितमे खीस्ताब्दीय-नवम्बरमासस्यैकविंशतितमे दिवसे भारतवर्षाधिष्ठात्रा श्रीमद्राजेन्द्रप्रसादमहोदयेन मिथिलासंस्कृत-विद्यापीठोऽयं संस्थापितः ।

आवासिकेऽस्मिन् विद्यापीठे संस्कृतविद्याया विभिन्नशाखासु गम्भीरगवेषणात्मकाध्ययनं तदनुसारेणैव स्वल्पसंख्यकेभ्यो विद्यार्थिभ्यः स्नातकोत्तरशिक्षाप्रदानञ्च लक्ष्यम् । सम्मेलनस्थान-मेतद्भारतीयप्राचीनशिक्षापद्धतिजुषां पण्डितानामाधुनिकगवेषणापराणां विदुषाञ्च । सम्भाव्यते चात्र परस्परपूरकत्वं सारस्वतवर्गद्वयस्य । अनेन प्रकारेण विद्यापीठेऽत्र प्राचीनविद्याध्ययन-पद्धतिरर्वाचीनविद्याक्षेत्रेषु प्रतिष्ठिता भविष्यति ।

आधुनिकवैज्ञानिकपद्धत्यनुक्रमेण प्राचीनशास्त्रग्रन्थानधिकृत्य प्रोच्चतमानुसन्धानं हि मुख्यं कर्त्तव्यत्वेन परिगृहीतमत्र । अध्यापका गवेषकाश्च विभिन्नविषयेषु गवेषणायां संलग्नाः सन्ति । पीठस्य स्वतन्त्रतया स्वल्पदीर्घकालसाध्या च गवेषणासरणिस्तदनुपुस्तकप्रकाशनञ्चेत्युभयं प्रवर्त्तितम् ।

मिथिलाप्रान्ते तथाऽन्यत्र च यानि खलु प्रत्नानि हस्तलिखितानि पुस्तकानि समुपलभ्यन्ते तेषां संग्रहोऽपि विद्यापीठस्यान्यतम उद्देश्यः । एतेष्वेव ग्रन्थरत्नेषु भारतीयकलाविज्ञानपरम्परा निहितास्ति । यत्र पुनस्तादृशः संग्रहो न शक्यकरणीयस्तत्र केवलं विशेषविवरणोऽपि सम्पादनीय एव ।

अत्र विद्यापीठे न केवलं वैयक्तिकी गवेषणा प्रचरति अपि तु शिक्षकाः विद्यार्थिनश्च परस्परं मिलित्वा सामूहिकरूपेण गवेषणाकार्यं परिचालनापरिषदो निर्देशानुसारेण स्वीकुर्वन्ति । काले काले निर्दिष्टकालसाध्या ये विषयाः स्वीकर्तव्यास्तेषु कियन्तोऽधस्तादुल्लिख्यन्ते—

(१) वैज्ञानिकरीत्या पुराणानामुपनिषदां च सम्पादनम् ।
(२) प्राचीनहस्तलिखितानां ग्रन्थानां तथ्यपूर्णवस्तूनां च संग्रहः परीक्षणं विवरण-निर्माणं च ।
(३) बहुमूल्यानां संस्कृतग्रन्थानां प्राचीनानामाधुनिकानां च सम्पादनम् ।
(४) गवेषणनिबन्धानां विषयानुसारेण सामीक्षिकसूचीनिर्माणं तथा काले काले तत्परिपूर्त्तिविधानं च ।
(५) मूलग्रन्थानां परीक्षणं विधाय सर्वशाखान्वितस्य संस्कृतसाहित्यस्य पूर्णाङ्गेतिहास-निर्माणम् ।
(६) संस्कृतग्रन्थानां तत्कर्तॄणां च कालक्रमनिर्धारणम् ।
(७) भारतीयविद्यानिबन्धानां वार्षिकविवरणग्रन्थप्रणयनम् ।

इत्येवं व्यवस्थिते मिथिलासंस्कृतविद्यापीठस्थेन विशिष्टविदुषा श्रीदयानाथशर्म्मणा गवेषणापूर्वकं निर्मितोऽयं **विमण्डलवक्रविचारनाम्ना** प्रसिद्धो ग्रन्थो विपश्चितां पुरतः संस्थाप्यते। सुविदितमस्ति ज्योतिर्विदां यत्पूर्वाचार्यैरपि विषयेऽस्मिन् विशेषरूपेण विचारो न प्रकटितः। हर्षस्थानमेतद्यदनेन विशिष्टविदुषा सुगूढ़स्यास्य विषयस्योपरि गवेषणां विधाय विपश्चितां छात्राणां च कृते महानुपकारः कृतः। अथ च ग्रन्थममुमवलोक्यास्मद्देशीयाः पाश्चात्यशिक्षासम्पन्नाश्च विद्वान्सो विषयेऽस्मिन् गवेषणां कृत्वा इतोऽप्यधिकज्ञानप्रचारेण विशेषज्ञानद्वारोद्घाटनेन च प्राचीनविदुषां गौरवं परां काष्ठां प्रापयिष्यन्तीति।

वैशाखशुक्लपूर्णिमा
१३६१

श्रीउमेशमिश्रः
प्रधानसम्पादकः

प्राक्कथनम्

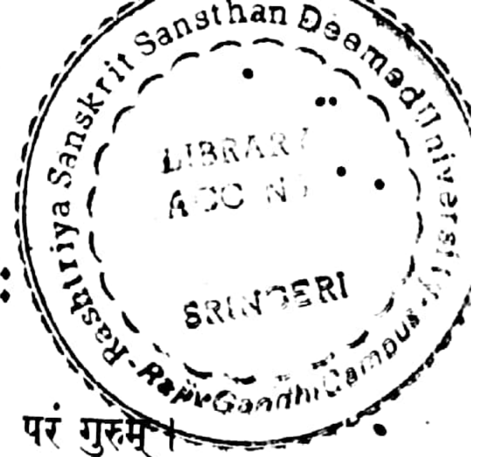
अवगच्छन्त्येव भवन्तो यद्भास्कराचार्येण स्वसिद्धान्तशिरोमणौ गोलबन्धाधिकारे भगोले त्रिज्यागोले वा विमण्डलरचनावसरे "शीघ्रकर्णेन भक्तास्त्रिभज्यागुणाः स्युः परक्षेपभागा ग्रहाणां स्फुटाः" इत्यादिना चन्द्रादीनां ग्रहाणां स्फुटान् शरांशान् ज्ञात्वा विमण्डलानि वृत्ताकाराणि बद्धानि। तत्रैव स्वस्वविमण्डले पूर्वोक्ता ग्रहा भ्रमन्ति इत्यप्युक्तम्। ततः पूर्वन्तु केनापि भारतीयगणितज्ञेनायं विषयो न स्पृष्टः। तत्पश्चादपि प्राचीनमतखण्डनपरः सूर्यभक्तः परमोद्भटः कमलाकरभट्टोऽपि न किमप्यस्मिन् विषये लिखितवान्। परन्तु काश्यामस्मद्गुरुचरणानां महामहोपाध्यायानां पण्डितश्रीसुधाकरद्विवेदिनां समय एव पूर्वोक्तस्फुटशरानयने शास्त्रार्थचर्चां कुर्वाणानां तदीयशिष्याणां श्रीहरीझा-श्रीचतुर्भुजमिश्र-श्रीअपूछझाप्रभृतीनां ज्योतिर्विज्ञाननिष्णातानां महतां पण्डितानां मध्ये चर्चाऽजनि यद्भास्कराचार्यानीतभगोलीयविमण्डलं प्रतिभाबोधकयुक्त्या न वृत्ताकारं भवतीति। परञ्च क आकारो भवेद्विमण्डलस्य त्रिज्यागोले एतन्निर्णयो न जातः। परमिमं विषयं श्रीगुरुचरणानामेव मुखात् श्रुतवता मया तेषामेवानुकम्पया क्रियानायासः प्रारब्धः। कठिनपरिश्रमेणानन्यमनस्केन मया समये समयेऽत्रत्यसिद्धान्तगवेषणयोपयुक्तग्रन्थसमालोचनया च इदं वक्रं स्थिरीकृतं यदिदं वक्रं अनेकधरातलीयं कूर्मपृष्ठाकृति भवेत् वा द्वितीयं नामास्य वक्रस्य गौलिकदीर्घवृत्तमपि वक्तुं शक्यते। अथ चास्य वक्रस्य विषये न किमपि पाश्चात्यैः डाक्टर कर्ण-मान्यवर-गौड फ्रे-मान्यवरपार्करप्रभृतिभिः ज्यौतिषपण्डितैः मतं प्रकाशितम्। अस्मिन्नपि वक्रे सरलदीर्घवृत्तवद्बहवः सिद्धान्ता घटन्ते। बृहद्व्यासलघुव्यासभुजकोट्यादीनामपि विन्यासाः सरलदीर्घवृत्तवत् सन्ति। आशास्यते च मम मित्राणि गरीयांसो विद्वांसश्च अत्रत्यत्रुटिं परिशोध्य मां कृतार्थयिष्यन्ति तथा च वक्रीयवैशिष्ट्यमवगत्यानन्दानुभवं करिष्यन्ति। एवं मम परिश्रमोऽपि सफलो भविष्यतीति।

अस्य ग्रन्थस्य प्रकाशने प्रथमं विहारराजान् प्रति धन्यवादं वितरामि येषामनुकम्पया वक्रमिदं विदुषां पुरतः प्रकाशितमभूत्। ततः परमत्रत्य-डाइरेक्टर-महामहोपाध्याय-पण्डितश्रीमदुमेशमिश्रेभ्यो धन्यवादं ददामि ये खलु अत्रत्यं राजानं सम्बोध्य पुस्तकमिदं मुद्रापयितुं प्रयासं कृतवन्तः तथा च संशोधनादौ महत्साहाय्यमकुर्वन्निति।

विनीतः

श्रीदयानाथ(नन्द)झा

विमण्डलवक्रविचारस्य विषयसूची



विमण्डलवक्रविचारः

प्रणम्य तारिणीमाद्यामादौ तस्मात् परं गुरुम् ।
विमण्डलस्य वक्रस्य विचारं वच्मि विन्मुदे ॥१॥
सन्ति विज्ञानशास्त्राणि विविधान्यधुना बुधाः ।
तेष्विदं ज्यौतिषं शास्त्रं श्रेष्ठं वैज्ञानिकैर्मतम् ॥२॥
तत्रेदमद्भुतं वक्रं पूर्वपश्चिमदेशिभिः ।
नाधुनावधि संस्पृष्टं तद्विचारे स्थितोऽस्म्यहम् ॥३॥
जगन्माता जगत्तारा देवैर्ब्रह्मादिभिः स्तुता ।
कारयत्येव यत्कर्म निश्चितं तत्करोम्यहम् ॥४॥

प्रथमं विमण्डलवक्रस्य परिभाषा निर्णीयते । विम्बस्य सूर्यादिग्रहाणां वास्तविकघनपिण्डात्मकस्वरूपाणां यन्मण्डलं भ्रमणमार्गः, तदेव विम्ब-मण्डलम्, अथ वा लघुस्वरूपं विमण्डलमित्युच्यते ।

विमण्डलसम्बन्धि यद्वक्रं अर्थात् प्रतिभावोधकयुक्त्या ग्रहगोलीय-विमण्डलस्य भगोले त्रिज्यागोले वा परिणामनेन यद्वक्रमुत्पद्यते तदेव वक्रं विमण्डलवक्रमित्युच्यते ।

अत्र च परिणामने स्वल्पान्तरात् भूपृष्ठभूकेन्द्रयोरभेदात् भूकेन्द्रं मुख्य-स्थानं मतम् । यथा प्राचीनैर्भास्करादिभिः भगोले शरादिज्ञानार्थं विमण्डल-बन्धनावसरे भूकेन्द्रादेव सर्वा व्यवस्थाः गृहीताः । अर्थात् भूकेन्द्रमेव परिणामनस्य मुख्यस्थानं तैः स्वीकृतम् ।

अतोऽधुना भूकेन्द्रतः ग्रहगोलीयविमण्डलाधारसूची निर्मीयते । तस्याः सूच्याः कर्णा यत्र यत्र भगोलेऽथ वा दृग्गोलेऽथ वा त्रिज्यागोले लगेयुस्तत्र तत्र य आकार उत्पद्यते तदेव विमण्डलवक्रम् । तस्य प्रथमं विस्तारस्य दैर्घ्यस्य च विचारः क्रियते ।

अत्र सूच्यां प्रथमं स्थिरत्रिभुजस्य निर्णयः क्रियते। ग्रहगोलीयोच्च-देशात् विमण्डलोपरि लम्बवृत्तं क्रियतां, तद्वृत्तमुभयदिशि यत्र विमण्डले लगेत् तद्बिन्दुद्वयगतं भूकेन्द्रतः कर्णद्वयं गृह्यताम्। तथा च उभयबिन्दुगतो विमण्डलस्य व्यासरेखा। एताभिस्त्रिसृभी रेखाभिर्जायमानमत्र विषमसूच्याः स्थिरत्रिभुजं भवेत्।

अत्र विमण्डलस्य भूकेन्द्रे केन्द्राभावात् विषमैव सूची भवेत्। स्थिरत्रिभुज-लक्षणं यदाधारवृत्तधरातले लम्बरूपं, अथ च आधारवृत्तव्यासाधारं भवेत्, तथा च सूच्या बृहत्तमलघुतमकर्णौ तत्रैव त्रिभुजे भवेताम्। अत्र यदिष्टवृत्तम् उच्चाद्विमण्डले लम्बरूपं तद्वृत्तस्य धरातलस्य भूकेन्द्रेऽपि सत्ताऽस्ति। अथ च विमण्डलस्य बिन्दुद्वयेऽपि च ततः प्राक् त्रिभुजं सर्वथा सर्वात्मना विमण्ड-लोपरि लम्बरूपवृत्तधरातलेऽस्ति। परञ्च एतदिष्टवृत्तधरातलं विमण्डले लम्बरूपम्। तत इदमपि त्रिभुजधरातलं लम्बरूपम्। अथ च उच्चात् प्रथम-बिन्दोः विमण्डलस्य सर्वबिन्द्वपेक्षया नैकट्यात् तत्रत्यः परमदीर्घकर्णः अथ च द्वितीयबिन्दोः उच्चात् परमदूरान्तरात् परमाल्पकर्ण इति गोलीयरेखा-गणितसरलरेखागणिताभ्यां सुस्पष्टम्। ततः प्राक् त्रिभुजं विमण्डलधरातले लम्बरूपम्। तत्रैव सूच्याः बृहत्तमलघुतमकर्णौ वर्तेते। अथ चाधारवृत्तस्य विमण्डलस्य व्यासः तदीयाधारः। अत इदं त्रिभुजं स्थिरत्रिभुजम्।

अथ प्रथममेतत् स्थिरत्रिभुजमधिकृत्य विचार्यते यद्भगोले परिणतं वक्रं किमपि प्रचलितवक्रमध्ये सन्निविष्टमस्ति न वा? मन्यतां तावत् भगोले यद्वक्रं तदेकधरातलीयं किमपि। तदवस्थायां तद्वक्रधरातलस्थिरत्रिभुज-धरातलयोगरेखयाऽर्थात् भगोलीयस्थिरत्रिभुजकर्णद्वयान्तःपातिपूर्णज्यया आधाररूपया यद्भूकेन्द्रतः त्रिभुजमुत्पद्यते भगोलाधारे तत् त्रिभुजं सर्वसंमतं स्पष्टं समद्विबाहुकम्। यतः भूकेन्द्राद्भगोलान्तं सर्वत्रान्तरं त्रिज्यातुल्यमिति। अथ च प्राक् स्थिरत्रिभुजं तु विषमत्रिभुजम्, तत्र कर्णयोर्न्यूनाधिकत्वात्। अतः समद्विबाहुकत्रिभुजविषमत्रिभुजयोः कदाचिदपि कोणत्रयस्य साम्यं न भवेत्। अत्रैकः कोणस्त्वेक एव शीर्षगतः। आधारलग्नावपि कोणौ अनयोः

समविषमत्रिभुजयोः समत्वं न भजेते। ततः प्रतिभाबोधकयुक्त्या वक्रस्य वृत्तत्व-कल्पनाऽसम्भवा ।

ननु वृत्तादितरेषां दीर्घवृत्तादीनां वक्राणां सम्भावनाया अपि निर्णयः क्रियते । अत्र सूचीछेदनव्यवस्थया एकस्मिन् पार्श्वे असमानान्तरधरातलेन छिद्यमाना विषमा सूची वृत्तव्यवस्थातः इतरस्थितौ दीर्घवृत्तस्य सम्भावनाऽस्ति। परञ्च गोलपृष्ठोपरि एकधरातलीयं किमपि वृत्तेतरवक्रं गोलीयरेखागणितयुक्त्या "यदि गोलघनक्षेत्र"मित्यादिना न भवितुमर्हति । अतो दीर्घवृत्तस्य सुतरां खण्डनं जातम् । अथ चातिपरवलयपरवलयादीनामप्येकधरातलीय-वक्राणामपि गोलपृष्ठोपरि न निवेशो भवेत् । अथ वा ससीमगोलपृष्ठोपरि असीमवक्रस्यातिपरवलयपरवलयद्वयस्य निवेशासंभवात् । अतोऽत्र जिज्ञासो-दयति यदवश्यमेव किमपि विशिष्टं वक्रमनेकधरातलीयं भवेदेव। यच्छेदन-क्षेत्रं कमपि गोलपृष्ठभागमभिव्याप्नोति ।

तत्र विषमसूचीक्षेत्रं स्थिरत्रिभुजधरातलेन समानमुभयपार्श्वे विभज्यमानं वर्तते। ततः प्रत्यक्षमेवानुमानेन वा संभाव्यते यद्विषमसूच्याः समानःसमानः अर्धभागः स्थिरत्रिभुजादुभयदिशि भगोले परिणामनेन वक्रस्य स्थिरत्रिभुज-धरातलादुभयदिशि समानं समानमेव भागं व्यनक्ति यस्य स्फुटीकरणमग्रे गणितद्वारा वक्रीयसिद्धान्तबलेन भविष्यति । अधुना स्थिरत्रिभुजीय-विमण्डलव्यासरेखा भगोले परिणता यच्चापमभिव्याप्नोति तच्चापमेव वक्र-स्यैकश्चापीयो व्यासो भवेत् । तत एव उभयदिशि वक्रं समानं द्विर्विभक्तं भवेत्। यतः प्राकृतनविमण्डलीयव्यासरेखोपरि लम्बमानाः यावत्यः पूर्णज्याः विमण्डलधरातलगता भवेयुः ताभ्यः प्रत्येकपूर्णज्यया उभयपार्श्वीयसमाभ्यां च कर्णाभ्यां यत् यत् समद्विबाहुत्रिभुजं भवेत् सा च पूर्णज्या भगोले परिणता यद्यच्चापं व्याप्नोति तत्तच्चापपूर्णज्या स्वस्वविमण्डलीयपूर्णज्यया समानान्तरा भवेत्। भगोलेऽपि त्रिज्यातुल्यकर्णयोः समत्वात्। समद्विबाहुकत्वं विमण्डलीयपूर्णज्याधारेऽपि त्रिभुजस्य समद्विबाहुकत्वम् । ततो द्वयोः समानान्तरत्वात् मध्यगतस्थिरत्रिभुजीयधरातलोपरि द्वयोर्लम्बत्वाच्च भगोले

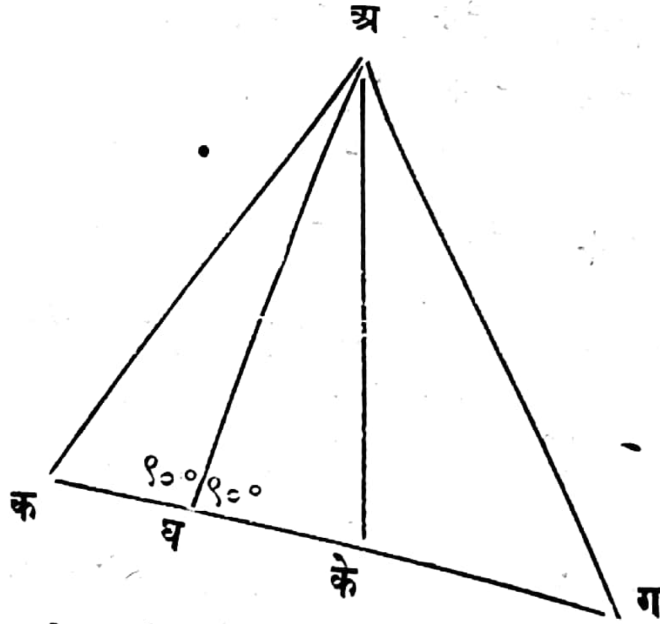
स्थिरत्रिभुजीयाधाररेखोपरि भगोलीयपूर्णज्याया लम्बत्वात् भगोलाधारेण पूर्णज्याऽर्धिता लम्बरूपा च भवेत्। अतः स्थिरत्रिभुजादुभयपार्श्वे चापमानमपि पूर्णज्याक्रान्तं समानं द्विर्विभक्तं भवेत्। अतः स्थिरत्रिभुजीयचापादुभयपार्श्वे सर्वाणि चापानि लम्बरूपाणि समानं द्विर्विभक्तानि जातानि। अतः स्थिरत्रिभुजीयवक्रचापं सर्वाणि लम्बचापानि समानं विभजते। अतः स्थिरत्रिभुजीयचापं वक्रस्य मध्यगतं भवेत्, मध्यगतत्वात्। इदं चापं वक्रस्य कोऽपि व्यासो भवितुमर्हति।

इदं चापं कदा महत्तमं भवेत्? अर्थात् कस्य वक्रस्येदं चापं स्थिरत्रिभुजधरातलगतं परमं भवेदिति। तत्र जिज्ञासायां यदा स्थिरत्रिभुजस्य भूकेन्द्रसंलग्नशीर्षकोणः परमाधिकः तदा तत्संमुखचापमपि स्थिरत्रिभुजधरातलीयं परमं भवेत्। परञ्च यदा सूचीसत्ता भवेत् तदा तु निश्चितमस्ति यत् स्थिरत्रिभुजीयशीर्षकोणः समकोणद्वयादल्पो भवेत्। यदा विमण्डलं उच्चदेशे गच्छेत् तदा तु भूकेन्द्रेऽपि विमण्डलधरातलसत्ता भवेत्। तदा भूकेन्द्रतो विमण्डलाधारा सूची नोत्पद्यते। अथ च स्थिरत्रिभुजशीर्षकोणस्तत्र समकोणद्वयसमानः। ततः पूर्वोक्तचापमपि समकोणद्वय (१८०°) समानं भवेत्। वक्रमपि अत्र वृत्ताकारं भवेत् परमश्च वक्रमानं भवेत्। अत्रैव भास्करादिमतेन स्वीकृतं भगोले विमण्डलं वृत्ताकारं सम्यक्तां गच्छतीति दिक्।

अत्र पुनर्जिज्ञासोदयति यत् क्व स्थिरत्रिभुजीयविमण्डलवक्रस्य व्यासः परमाल्पो भवेत्? तत्स्थाननिर्णये बहूनि वस्तूनि तद्वक्रे निर्णेतव्यानि सन्ति येषां ज्ञानेऽपि एतद्वक्रीयकतिचन सिद्धान्ता उपयोक्ष्यन्ते। ततः प्रथमं त एव सिद्धान्ताः समुच्यन्ते।

अत्र विमण्डलाधारा विषमा सूची वर्तते। अतो विषमसूच्याः कियन्तः सिद्धान्ता उच्यन्ते—

विषमसूचीमध्यस्थव्यासाधारं त्रिभुजक्षेत्रम् (१)



अत्र मन्यते प्रथमं स्थिरत्रिभुजम्। तत्र लघुतमः कर्णः=अक। बृहत्तम-कर्णः=अग। आधारवृत्तव्यासः = कग। वृत्तकेन्द्रम् = के। कके = वृत्त-व्यासार्द्धम्। गके = वृत्तव्यासार्द्धम्। अके = वृत्तकेन्द्रगता रेखा शीर्षतः।

अघ = व्यासोपरि लम्बः।

∴ अकघ त्रिभुजे $अक^2 = कघ^2 + अघ^2$

अगघ त्रिभुजे $अग^2 = गघ^2 + अघ^2$

परञ्च $कघ = केक - केघ$.........(१)

$गघ = केग + केघ$

परञ्च केग = केक, व्यासार्धत्वात्।

ततः $गघ = केक + केघ$.........(२)

अतः $कघ^2 = (केक - केघ)^2$

$वा = केक^2 - २ \times केक \times केघ + केघ^3$

एवम् $गघ^2 = (केक + केघ)^2$

$= केक^2 + २ केक \times केघ + केघ^2$

अतः $अक = केक^2 - २ केक \times केघ + केघ^2 + अघ^2$

एवम् $अग^2 = केक^2 + २ केक^2 \times केघ + केघ^2 + अघ^2$

अनयोर्योगः द्विघ्नघातस्य घनर्णयोः समत्वान्नाशे कृते

$$\text{अक}^2 + \text{अग}^2 = 2\ \text{केक}^2 + 2\ \text{केघ}^2 + 2\ \text{अघ}^2$$

$$= 2\ (\text{केक}^2 + \text{केघ}^2 + \text{अघ}^2)$$

परश्च 'अघके' जात्यत्रिभुजे $\text{केघ}^2 + \text{अघ}^2 = \text{अके}^2$

$$\text{अतः}\quad \text{अक}^2 + \text{अग}^2 = 2\ (\text{केक}^2 + \text{अके}^2)$$

$$\text{वा} = 2 \left\{ \left(\frac{\text{वृत्त}}{2}\right)^2 + \text{केन्द्रगतमध्यरेखा}^2 \right\}$$

$$\text{अतः लक}^2 + \text{वृक}^2 = 2 \left\{ \left(\frac{\text{वृत्त}}{2}\right)^2 + \text{केशीर्षतमरेखा}^2 \right\}$$

अथात्र विषमसूच्यां व्यासाधाराणि बहूनि त्रिभुजानि सन्ति। सर्वस्मिन् त्रिभुजे सूचीशीर्षतो वृत्तमध्यगता रेखा एकैव सर्वत्रिभुजनिष्ठा। अथ च वृत्त-व्यासार्धं सर्वत्र समानमेव। अतः सिद्धं यत् सर्वस्मिन् व्यासाधारत्रिभुजे

$$\text{भुजद्वयवर्गयोगः} = \left\{ \left(\frac{\text{वृत्त}}{2}\right)^2 + \text{शीर्षमध्यरेखा}^2 \right\}$$

समान एव भवेत्।

इत्येकः प्रथमः सिद्धान्तः।

अथ द्वितीयः सिद्धान्तो विविच्यते—

अधुना विचार्यते यदेतेषु व्यासत्रिभुजेषु भुजद्वयघातः अथ वा कर्ण-द्वयघातः कस्य त्रिभुजस्य परमाल्पः कस्य महत्तमः भवेत्? एतस्य विचारः क्रियते। अत्र सर्वेषु व्यासाधारत्रिभुजेषु एकं समद्विबाहुकं त्रिभुजं भवेत्। यस्य व्यासः स्थिरत्रिभुजीयव्यासोपरि लम्बो भवेत्। तद्व्यासाधारत्रिभुजे भुजद्वयान्तरं परमाल्पं अर्थात् शून्यमितम्।

अथ च स्थिरत्रिभुजीयभुजद्वयमत्र एको लघुतमः कर्णः, एकश्च महत्तमः कर्णः। अतोऽनयोरन्तरं परमाधिकं भवेत्।

अतः इष्टस्थानीयभुजद्वयान्तरं स्थिरत्रिभुजीयकर्णद्वयान्तरतो न्यूनं, अथ च समद्विबाहुककर्णद्वयान्तरतोऽधिकं भवेत्।

अथ स्थिरत्रिभुजीयकर्णद्वयस्य संकेतनाम 'ल वृ' ।

समद्विबाहुत्रिभुजकर्णद्वयस्य नाम 'स, स१' ।

इष्टस्थानीयकर्णद्वयस्य नाम इ, इ१ ।

अतः पूर्वयुक्त्या

$$वृ - ल > इ - इ_१ > स - स_१$$

एतेषां वर्गाः—

$$वृ^2 + ल^2 - २ \times वृ \times ल > इ^2 + इ_१^2 - २ इ \times इ_१ >$$
$$स^2 + स_१ - २ स \times स_१ = ०$$

परञ्च पूर्वसिद्धान्तेन

$$वृ^2 + ल^2 = इ^2 + इ_१^2 = स^2 + स_१^2$$

सर्वे समानाः ।

अतः समानकर्णद्वयवर्गयोगस्य निष्काशनात् पूर्वविषमीकरणम् ।

$$-२ \times ल \times वृ > -२ इ \times इ_१ > -२ स \times स_१$$

अतः पक्षपरिवर्तनेन

$$२ इ \times इ_१ > २ \times ल \times वृ$$

एवम् पक्षपरिवर्तनेनैव च

$$२ स \times स_१ > २ इ \times इ_१$$

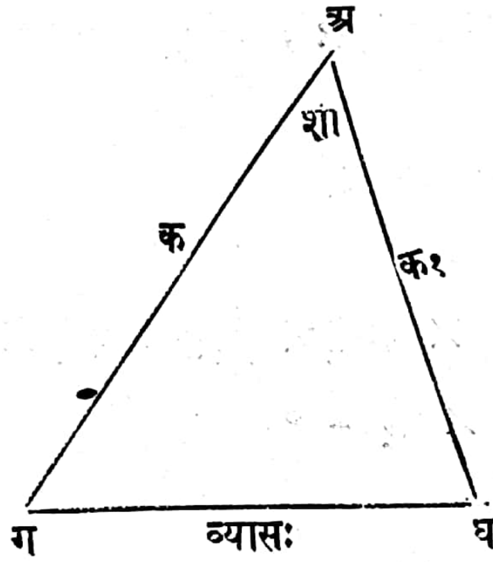
अतः सिद्धम्

$$२ स \times स_१ > २ इ \times इ_१ > २ ल \times वृ$$
$$वा = स \times स_१ \; 7 \; इ \times इ_१ \; 7 \; ल \times वृ$$

एतेन सिद्धम्—यत् स्थिरत्रिभुजीयकर्णद्वयघातः सर्वेभ्यो व्यासाधारीय-त्रिभुजकर्णद्वयघातेभ्यः प्रत्येकतः अल्पः सिद्धः । अथ च व्यासाधारसमद्विबाहुकत्रिभुजस्य कर्णद्वयघातः सर्वेभ्यो घातेभ्यः प्रत्येकतः अधिकः सिद्धः ।

इति द्वितीयः सिद्धान्तः ।

अथ तृतीयः सिद्धान्तो विविच्यते—क्षेत्रम् (२)



अधुना विचार्यते एतेषु व्यासाधारत्रिभुजेषु कस्य त्रिभुजस्य शीर्षकोणः परमाधिकः कस्य परमाल्पो भवेदिति ?

किमपि त्रिभुजं व्यासाधारं गृहीत्वा विचार्यते ।

तत्र प्रथमकर्णः = क । द्वितीयकर्णः = क१ । आधारः = गघ = वृत्तव्यासः । शीर्षकोणः = शी ।

तत्र त्रिकोणमित्या

$क^2 + क_१^2 - २ \times क \times क_१ \times कोज्या\ शी = गघ^2 = व्यास^2$

अत्र त्रि = १

वा पक्षान्तरकरणेन

$$\frac{क^2 + क_१ - व्यास^2}{२ \times क \times क_१} = को\ ज्या\ शी$$

एवमत्र सर्वत्र त्रिभुजे कर्णद्वयवर्गयोगः । तत्र व्यासवर्गो न्यूनः भाज्ये भवेत् । हरश्च कर्णद्वयघातः द्विगुणितो भवेत् । परञ्च भाज्यः सर्वत्र समानो भवेत् । यतः $क^2 + क_१^2$ = वर्गयोगः = सर्वत्रिभुजे पूर्वसिद्धान्तेन समानः । व्यासवर्गश्च समान एव । ततोऽन्तरतुल्यो भाज्यः समान एव । हरः कर्णद्वयघातः

द्विगुणितः। तत्र व्यासाधारीयसमद्विबाहुकत्रिभुजीयकर्णघातः सर्वेभ्योऽधिकः। स्थिरत्रिभुजीयकर्णद्वयघातः सर्वेभ्योऽल्पः। अतः फलरूपा शीर्षकोणकोटिज्या समद्विबाहुकस्थले सर्वाल्पा भवेत्। अथ च स्थिरत्रिभुजीयशीर्षकोणकोटिज्या सर्वाधिका भवेत्। अतो यदा शीर्षकोणः समकोणाल्पः प्रथमपदीयः तदा तु स्थिरत्रिभुजीयशीर्षकोणः सर्वेभ्यः शीर्षस्थानीयकोणेभ्यः प्रत्येकस्मादल्पो भवेत्। अथ च समद्विबाहुकत्रिभुजशीर्षकोणः सर्वेभ्योऽधिको भवेत्। यदि च कोणः समकोणाधिकः तदा कोणकोटिज्या ऋणात्मिका, तदा कोणकोटिः समकोणे योज्यते तदा शीर्षकोणः स्यात्। तदवस्थायां स्थिरत्रिभुजीयशीर्षकोणः सर्वाधिकः। समद्विबाहुकत्रिभुजीयशीर्षकोणः सर्वाल्पः स्यात्। अत्रैव तृतीयसमीकरणे यदि

क^2 + क$_1^2$ = व्यास^2 तदा भाज्यः = ०

हरः द्विगुणकर्णघातः

तेन विभक्तं फलम् = ० = कोज्या शी

सर्वेषु त्रिभुजेषु तदा

सर्वत्रिभुजे शीर्षकोणः = ९० − ०

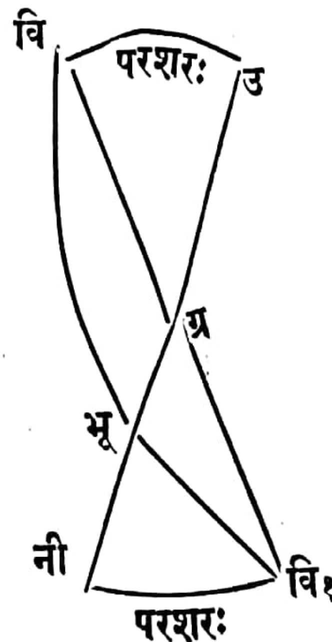
= ९०

समकोणसमानः

तदवस्थायाः सर्वे शीर्षकोणाः समानाः भवन्ति अर्थात् ९०° तुल्या भवेयुः।

अधुना प्रकृते विमण्डलाधारविषमसूच्याः शीर्षकोणः समकोणाधिकः, समकोणाल्पः, समकोणतुल्यो वा स्यादिति विचार्यते।

क्षेत्रम् (३)



यदवस्थायां विमण्डलं उच्चस्थानात् परमशरान्तरे भवेत् तदवस्थायां निर्णेष्यमाणः स्थिरत्रिभुजीयकोणः परमाल्पो भवेत्। सोऽपि कोणोऽत्र समकोणाधिक एव भवेत्। यतः नीचासन्नेऽपि < नीभूविं१ कोणः परमभगोलीय-परमः शरः समकोणाल्पः। स च यदा १८०°— अत्रोनीक्रियते तदाशेषः > नि१भूउ कोणः समकोणाधिकोऽवशिष्यते। तत्र यदा विभूउ कोणो योज्यते तदा < विभूविं१ कोणः स्थिरत्रिभुजीयशीर्षकोणः सुतरां समकोणाधिकः। अयं च यदा समकोणाधिकस्तदा सर्वे समकोणाधिकाः। ततोऽप्यधिकः स्थिर-त्रिभुजीयकोणो भवेत्।

इति चतुर्थः सिद्धान्तः।

पूर्वं सर्वेषु स्थिरत्रिभुजेषु उच्चस्थानीयविमण्डलाधारीयस्थिरत्रिभुजशीर्ष-कोणः परमाधिकः पूर्वसिद्धः। अधुना कः परमाल्पस्तस्य विचारः क्रियते।

अत्र यावन्ति स्थिरत्रिभुजानि भवेयुः तेषु सर्वेषु कयोः स्थिरत्रिभुजीय-लघुतमबृहत्तमकर्णयोरन्तरं परमाल्पं भवेत्? इति विचार्यते। इदं यदा उच्च-स्थानात् विमण्डलं परमशरान्तरे भवेत् तदा विमण्डलीयोच्चकर्णः सर्वस्थानीय-विमण्डलीयोच्चकर्णेभ्यः प्रत्येकस्मात् अल्पः। यतः उच्चात् दूरान्तरे वर्तते। अयमेव कर्णः स्थिरत्रिभुजे सर्वत्र बृहत्तमकर्णः। अथ च नीचस्थलात् अत्र विमण्डलीयनीचकर्णः परमनीचकर्णात् दूरे भवेत्। तथा च अन्यत्रत्येभ्यः विमण्डलीयनीचकर्णेभ्यः प्रत्येकस्मात् अयं विमण्डलीयनीचकर्णः परमाधिकः। अयमेव कर्णः स्थिरत्रिभुजे लघुतमकर्णः। अतः सर्वत्रत्येभ्यः बृहत्तमलघुतम-कर्णान्तरेभ्यः प्रत्येकस्मात् अत्र बृहत्तमलघुतमकर्णान्तरं परमाल्पं भवेत्।

अथात्रस्थलीयबृहत्तमकर्णलघुतमकर्णयोर्नाम लघुसंकेतेन बृहत्तम-कर्णः = बृ। लघुतमकर्णः = ल

अन्यस्थलीयबृहत्तमकर्णः = बृ१

लघुतमकर्णः = ल१

अतः पूर्वयुत्तयान्तरम् = बृ − ल < बृ१ − ल१

पक्षयोर्वर्गः

$बृ^2 + ल^2 - २ \times बृ \times ल < बृ_१^2 + ल_१^2 - २ बृ_१ \times ल_१$

परञ्च सर्वासु विमण्डलाधारासु विषमासु सूचीषु व्यासः स्थिरः। मध्यगता रेखा भूकेन्द्रग्रहगोलकेन्द्रयोरन्तरमिताऽन्त्यफलज्या स्थिरा। अतः पूर्वसिद्धान्तेन सर्वत्र बृहत्तमलघुतमकर्णयोर्वर्गयोगः समानः स्थिर एव आगच्छेत्।

ततः $बृ^2 + ल^2 = बृ_१^2 + ल_१^2$

ततः समयोर्नाशेन

$- २ ल \times बृ < - २ ल_१ \times बृ_१$

अथ वा पक्षान्तरेण

$२ बृ_१ \times ल_१ < २ बृ \times ल$

वा $बृ_१ \times ल_१ < बृ \times ल$ ......(५)

इति पञ्चमः सिद्धान्तः।

अधुना विचार्यते कस्य स्थिरत्रिभुजस्य कोणः शीर्षाख्यः परमाल्पो भवेत्?

अथ त्रिकोणमित्या पूर्वोक्तत्रिभुजयोरेव

$$शीर्षकोणकोटिज्या = \frac{ल^2 + बृ^2 - व्या^2}{२ \times ल \times बृ} \quad (१)$$

$$शी_१र्षकोणकोटिज्या = \frac{ल_१^2 + बृ_१^2 - व्यास^2}{२ \times ल_१ \times बृ_१} \quad (२)$$

अथ विमण्डलव्यासः एक एव। अत्र सर्वत्र स्थिरत्रिभुजे शीर्षकोणस्य समकोणाधिकात् कोणकोटिज्या ऋणात्मिका।

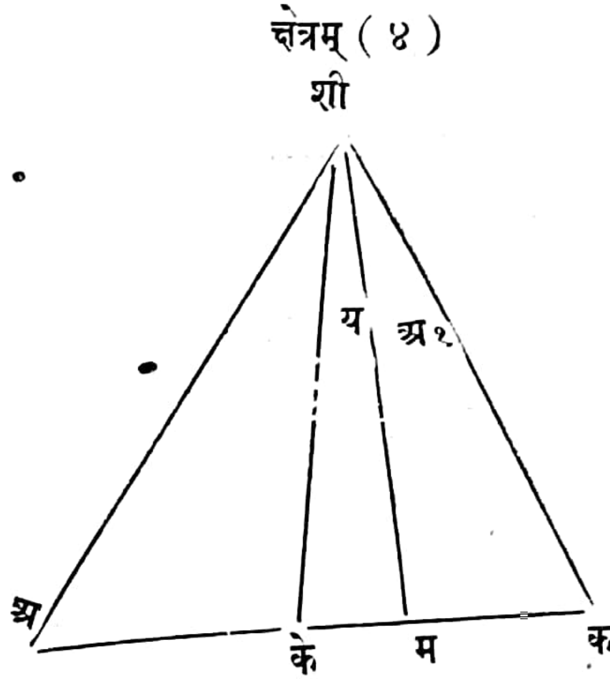
परमत्र समीकरणद्वये (१) (२) परमशरान्तरस्थानीयकर्णद्वयघातः परमाधिकः। अतस्तत्रत्यफलं परमाल्पं शीर्षकोणकोटिज्यामानम्। अतः (१)— प्रथमसमीकरणस्थफलं परमाल्पम्। अतस्तत्रत्यशीर्षकोणकोटिज्या परमात्मिका ऋणात्मिका च भवेत्। तच्चापं यदा नवत्यां योज्यते तदा तत्र शीर्षकोणः सुतरां सिद्धः परमाल्पः। अत एव तत्रस्थलीयशीर्षकोणसंमुखः भगोलीयविमण्डलवक्रव्यासः परमाल्पः स्यात्। उच्चस्थले परमाधिको व्यासः स्यात्।

इति षष्ठः सिद्धान्तः।

अधुना विचार्यते—यत् विषमसूच्यां व्यासाधारं समद्विबाहुकत्रिभुजं वर्त्तते तस्य शीर्षकोणो यो भवेत् अथ च स्थिरत्रिभुजीयशीर्षकोणस्यार्धकर्त्री रेखा यत्राधारे लगति ततः स्थिरत्रिभुजीयव्यासोपरि लम्बरूपिणी पूर्णज्या क्रियताम्। तदग्रगामिनौ यौ कर्णौ स्तस्ताभ्यां तत्पूर्णज्यया च यत् त्रिभुजमुत्पद्यते तस्य शीर्षकोणश्च अथ च व्यासाधारसमद्विबाहुत्रिभुजस्य यः शीर्षकोणः अनयोः कोणयोर्मध्ये कतरः कोणोऽधिको भवेत्? तस्य विचारः क्रियते।

अत्र द्वे त्रिभुजे समद्विबाहुके। अथ च द्वयोरेवाधारौ स्थिरत्रिभुजीयव्यासोपरि लम्बरूपाविति प्रत्यक्षमेव।

क्षेत्रम् (४)



अधुना अशीक एकं स्थिरत्रिभुजं गृहीतम्। अक = व्यासः। शीक = लघुतमकर्णः। शीअ = बृहत्तमकर्णः। शीम = शीर्षकोणार्धकर्त्री रेखा। के = केन्द्रबिन्दुः विमण्डलस्य। केबिन्दुतस्तु व्यासाधारसमद्विबाहुकत्रिभुजं प्रसिद्धमेवास्ति। यस्य शीर्षकोणः स्थिरत्रिभुजीयशीर्षकोणतोऽत्राल्प एव सिद्धः।

अधुना मस्थलतः स्थिरत्रिभुजीयव्यासोपरि लम्बरूपिणी पूर्णज्या कृता सा विमण्डलपाल्यां स्थानद्वये यत्र लग्ना तदग्राधारौ द्वौ कर्णौ गृहीतौ, एका च पूर्णज्या। इदमपि एकं समद्विबाहुकत्रिभुजं जातम्। अनयोः समद्विबाहुकत्रिभुजयोः शीर्षकोणयोर्न्यूनाधिकता विचार्यते।

अत्र कल्प्यते शीर्षकोणार्धम् = अ१

केशीम – कोणः = य

अतः ∠केशीक = अ१ + य

अथ च ∠केशीअ = अ१ – य

अतः केशीकत्रिभुजे कोणानुपातेन

$$\frac{\text{केक} \times \text{ज्या} \angle \text{शीकके}}{\text{ज्या} \angle \text{केशीक}} = \text{शीके}$$

पुनः केशीअ – त्रिभुजे

$$\frac{\text{अके} \times \text{ज्या} \angle \text{शीअके}}{\text{ज्या} \angle \text{केशीअ}} = \text{शीके}$$

अत्र स्वल्पस्वरूपे ∠ शीअके = अ

= ∠ शीकके = क

∠ केशीक = अ१ + य

∠ केशीअ = अ१ – य

$$\text{अके} = \text{केक} = \frac{\text{व्यास}}{२}$$

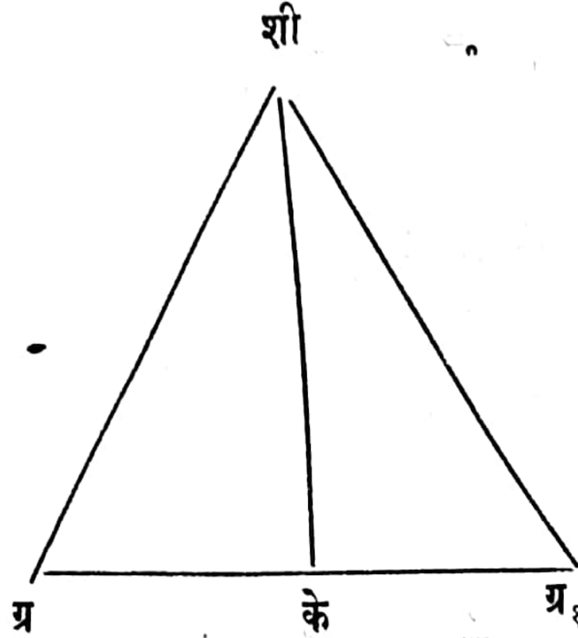
अतः पूर्वसमीकरणयोर्घातः

$$= \frac{\left(\frac{\text{व्या}}{२}\right)^2 \times \text{ज्याअ} \times \text{ज्याक}}{\text{ज्या}(\text{अ१} + \text{य}) \times \text{ज्या}(\text{अ१} - \text{य})} = \text{शीके}^2$$

अथात्रत्यसमद्विबाहुकत्रिभुजे शीकेरेखा मध्यगता वर्तते। सा च समद्विबाहुकत्रिभुजीयाधारे व्यासे केबिन्दौ लम्बरूपाऽस्ति रेखागणितयुक्त्या। अतोऽस्य समद्विबाहुकत्रिभुजस्य शीर्षकोणमपि अर्धयति शीके रेखा। अत्राधारव्यासाग्रं क्रमेण ग्र, ग्र१। समानकर्णौ क्रमेण शीग्र, शीग्र१,

$$\text{केग्र} = \text{केग्र}_१ = \frac{\text{व्यास}}{२}$$

यथा व्यासाधारसमद्विबाहुकत्रिभुजम् । क्षेत्रम् (५)



परञ्च शीकेग्र – त्रिभुजं जात्यम् । अतः शीर्षकोणार्धस्पर्शरेखावर्गः

$$\frac{\text{केग्र}^2 \times १}{\text{शीके}^2} \quad \text{अत्र त्रि} = १$$

$$\text{परञ्च केग्र} = \frac{\text{व्या}}{२}$$

$$\text{अतः शीर्षकोणार्धस्य}^2 = \frac{\left(\frac{\text{व्या}}{२}\right)^2}{\text{शीके}^2}$$

शीके², इत्यस्योत्थापनात्

$$\text{शीर्ष}\frac{\text{को}}{२}\text{स्य}^2 = \frac{\left(\frac{\text{व्या}}{२}\right)^2}{\dfrac{\left(\frac{\text{व्या}}{२}\right)^2 \times \text{ज्याअ} \times \text{ज्याक}}{\text{ज्या}(\text{अ}_१ + \text{य}) \times \text{ज्या}(\text{अ}_१ - \text{य})}}$$

$$\text{वा} = \frac{\text{ज्या}\ (\text{अ}_१ + \text{य}) \times \text{ज्या}\ (\text{अ}_१ - \text{य})}{\text{ज्या अ} \times \text{ज्याक}} \quad (१)$$

अथ चतुर्थक्षेत्रे शीमकत्रिभुजे

$$\text{शीम} = \frac{\text{मक} \times \text{ज्याक}}{\text{ज्या} \angle \text{मशीक}}$$

एवम् चतुर्थक्षेत्रे अशीमत्रिभुजे

$$\text{शीम} = \frac{\text{अम} \times \text{ज्याअ}}{\text{ज्या} \angle \text{मशीअ}}$$

अनयोः समीकरणयोर्घातः

$$\text{शीम}^{2} = \frac{\text{मक} \times \text{अम} \times \text{ज्याक} \times \text{ज्याअ}}{\text{ज्या} \angle \text{मशीक} \times \text{ज्या} \angle \text{मशीअ}}$$

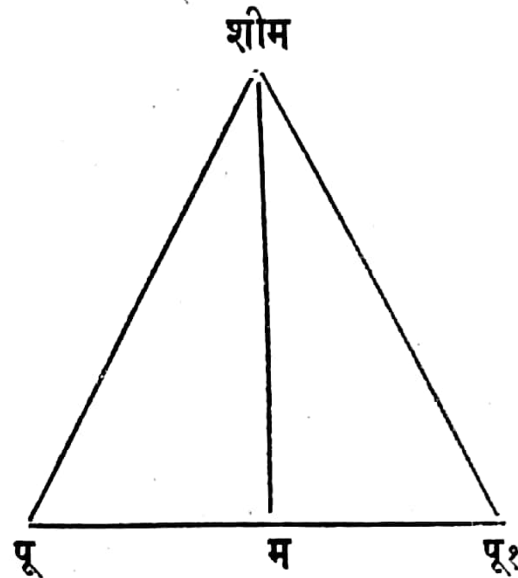
परञ्च $\angle \text{मशीक} = \angle \text{मशीअ} = \text{अ}_{\text{१}}$

= अर्धकोणः शीर्णकोणस्य

अतः

$$\text{शीं}^{2} = \frac{\text{मक} \times \text{अम} \times \text{ज्याक} \times \text{ज्याअ}}{\text{ज्या}^{2}\text{अ}_{\text{१}}} \quad (\text{२})$$

क्षेत्रम् (६)



मबिन्दुगतस्थिरत्रिभुजीयव्यासोपरि लम्बपूर्णज्याधारत्रिभुजं पूर्वपृष्ठे द्रष्टव्यम् । एतत्पूर्णज्याग्रम् = क्रमेण पू, पू१, अस्यार्धम् = मपू = मपू१

एतत्पूर्णज्याधारसमद्विबाहुत्रिभुजस्य शीर्षकोणार्धकर्त्री रेखा = रेखागणितयुक्त्या = शीमरेखा। यतः इयं पूर्णज्या मबिन्दुतः स्थिरत्रिभुजीयव्यासोपरिलम्बरूपा अतः अर्धिता। तदा शीमरेखा पूर्णज्यार्धबिन्दुगाऽपि सिद्धा लम्बरूपाऽपि।

अतः शीमपूजात्यत्रिभुजे

एतत् शीर्षकोणार्धस्पर्शरेखावर्गः

$$= \frac{\text{मपू}^2 \times १}{\text{शीम}^2} - \text{अत्रत्रि} = १ \quad (३)$$

अथ च (२) द्वितीयसमीकरणे

मक × अम = व्यासखण्डघातः

पूर्णज्यार्धवर्गसमानः = $\text{मपू}^2 = \text{मपू}_१^2$

अनेन (२) द्वितीयसमीकरणेन (३) तृतीयसमीकरणमिहमुत्थाप्यते।

तदा पूर्णज्याधारत्रिभुजस्य शीर्षकोणार्धस्पर्शरेखावर्गः अग्रे द्रष्टव्यम्।

$$\text{पू.आ.शी.कोस्प}\,\frac{}{२} = \frac{\text{मपू}^2}{\frac{\text{मक} \times \text{अम} \times \text{ज्याम} \times \text{ज्याअ}}{\text{ज्या}^2\text{अ}_१}}$$

$$= \frac{\text{ज्या}^2\text{अ}_१ \times \text{मपू}^2}{\text{मक} \times \text{अम} \times \text{ज्याक} \times \text{ज्याअ}}$$

परञ्च मक × अम = मपू^2

$$\text{ततः पू.आ.स.द्वि.शी.कोस्प}\,\frac{}{२} = \frac{\text{ज्या}^2\text{अ}_१ \times \text{मपू}^2}{\text{मपू}^2 \times \text{ज्याअ} \times \text{ज्याक}}$$

$$= \frac{\text{ज्याअ}_१^{\,2}}{\text{ज्याअ} \times \text{ज्याक}} \quad (४)$$

अथ च व्यासाधारीयसमद्विबाहुत्रिभुजशीर्षकोणार्धस्पर्शरेखावर्गः

= प्रथमसमीकरणस्थः।

अतः $= \frac{\text{ज्या (अ}_{१} + \text{य)} \times \text{ज्या (अ}_{१} - \text{य)}}{\text{ज्याअ} \times \text{ज्याक}}$ (१)

अथ पूर्णज्याधारसमद्विबाहुकत्रिभुजशीर्षकोणार्धस्पर्शरेखावर्गः

$= \frac{\text{ज्या}^{2}\text{अ}_{१}}{\text{ज्याअ} \times \text{ज्याक}}$ (४)

अनयोः प्रथमचतुर्थयोः (१) (४) समीकरणस्य स्पर्शरेखावर्गयोः न्यूनाधिकतार्थविषमीकरणं लिख्यते ।

$\frac{\text{ज्या}^{2}\text{अ}_{१}}{\text{ज्याक} \times \text{ज्याअ}} >< \frac{\text{ज्या(अ}_{१} + \text{य)} \times \text{ज्या(अ}_{१} - \text{य)}}{\text{ज्याअ} \times \text{ज्याक}}$

समहरयोर्नाशात्

$\text{ज्या}^{2}\text{अ}_{१} >< \text{ज्या(अ}_{१} + \text{य)} \times \text{ज्या(अ}_{१} - \text{य)}$

अथ त्रिकोणमित्या

$\text{ज्या(अ}_{१} + \text{य)} = \text{ज्याअ}_{१} \times \text{कोज्याय} + \text{ज्याय} \times \text{कोज्याअ}_{१}$

$\text{ज्या(अ}_{१} - \text{य)} = \text{ज्याअ}_{१} \times \text{कोज्याय} - \text{कोज्याअ} \times \text{ज्याय}$

अनयोर्घातः योगान्तरघातः वर्गान्तरसमान इति

ततः $\text{ज्या(अ} + \text{य)} \times \text{ज्या(अ}_{१} - \text{य)}$

$= \text{ज्या}^{2}\text{अ}_{१} \times \text{कोज्या}^{2}\text{य} - \text{ज्या}^{2}\text{य} \times \text{कोज्या}^{2}\text{अ}_{१}$

परञ्च $\text{कोज्या}^{2}\text{य} = १ - \text{ज्या}^{2}\text{य}$

$\text{कोज्या}^{2}\text{अ} = १ - \text{ज्या}^{2}\text{अ}_{१}$

अतः उत्थापनेन

$\text{ज्या (अ}_{१} + \text{य) } \times \text{ ज्या (अ}_{१} - \text{य)}$

$= \text{ज्या}^{2}\text{अ}_{१} (१ - \text{ज्या}^{2}\text{य}) - \text{ज्या}^{2}\text{य} (१ - \text{ज्या}^{2}\text{अ}_{१})$

$= \text{ज्या}^{2}\text{अ}_{१} - \text{ज्या}^{2}\text{अ}_{१} \times \text{ज्या}^{2}\text{य} - (\text{ज्या}^{2}\text{य} - \text{ज्या}^{2}\text{य} \times \text{ज्या}^{2}\text{अ}_{१})$

$= \text{ज्या}^{2}\text{अ}_{१} - \text{ज्या}^{2}\text{अ}_{१} \times \text{ज्या}^{2}\text{य} - \text{ज्या}^{2}\text{य} + \text{ज्या}^{2}\text{अ}_{१} \times \text{ज्या}^{2}\text{य}$

$= \text{ज्या}^{2}\text{अ}_{१} - \text{ज्या}^{2}\text{य}$

अत उत्थापनेन पूर्वोक्तविषमीकरणम् ।

∴ $ज्या^2 अ_1 >< ज्या^2 अ_1 - ज्या^2 य$

अधुना प्रत्यक्षमेव वामपक्षः दक्षिणपक्षतोऽधिकः विशेषस्फुटीकरणेन् समनाशेन पक्षपरिवर्तनेन च

$ज्या^2 य >< 0$

अतः $ज्या^2 य > 0$ सिद्धम्

अत्र वामपक्षस्थपदार्थः स्थिरत्रिभुजीयशीर्षकोणार्धकर्त्री रेखा मूलस्थ-पूर्णज्याधारत्रिभुजस्य समद्विबाहुकशीर्षकोणार्धस्पर्शरेखावर्गः आसीत्। ततो मूलग्रहणात् स्पर्शरेखातश्चापकरणाच्च पूर्णज्याधारीयसमद्विबाहुकत्रिभुज-शीर्षकोणार्धम् व्यासाधारीयसमद्विबाहुत्रिभुजस्य शीर्षकोणार्धादधिकम्। द्विगुणेन पूर्णज्याधारीयशीर्षकोणः व्यासाधारीयसमद्विभुजशीर्षकोणतोऽधिकः सिद्धः।

अयं षष्ठः सिद्धान्तः समाप्तः।

अयं पूर्वोक्ततृतीयसिद्धान्तेन (३) तथा च विमण्डलाधारे विपर्मसूच्यां शीर्षकोणस्य समकोणाधिकात् व्यासाधारीयसमद्विबाहुकत्रिभुजशीर्षकोणतः स्थिरत्रिभुजीयशीर्षकोणः अधिकः सिद्धः। अथ च अनेन (६) षष्ठ-सिद्धान्तेन व्यासाधारसमद्विभुजत्रिभुजशीर्षकोणतः शीर्षकोणार्धस्थानीय-पूर्णज्याधारसमद्विबाहुत्रिभुजशीर्षकोणोऽप्यधिकः। तदा स्थिरत्रिभुजीयशीर्ष-कोणतः पूर्णज्याधारीयसमद्विबाहुत्रिभुजशीर्षकोणः न्यूनोऽधिकः समो वा भवेदेतस्य निर्णयोऽपेक्ष्यते। तदग्रे वक्रस्य लघुव्यासबृहद्व्यासयोर्निर्णयो भवेत्।

अथ पूर्वोक्त चतुर्थ (४) सिद्धान्तेन पूर्णज्याधारसमद्विबाहुत्रिभुजशीर्ष-कोणार्धस्पर्शरेखावर्गः

$$= \frac{ज्या^2 अ_1}{व्याक \times व्याक}$$

अथ च स्थिरत्रिभुजस्य शीर्षकोणार्धम् = $अ_1$

अतोऽस्य त्रिभुजस्य शीर्षकोणार्धस्पर्शरेखावर्गः—

$\frac{ज्या^2 अ_1}{कोज्या^2 अ_1}$ { अत्र सर्वत्र त्रि = १

अथ पुनरत्र विषमीकरणं क्रियते—

$$\frac{ज्या^2 अ_1}{ज्याक \times ज्याअ} >< \frac{ज्या^2 अ_1}{कोज्या^2 अ_1}$$

समभजनेन समगुणनेन च $कोज्या^2 अ_1 >< ज्याक \times ज्याअ$......(अ)

अत्र शीर्षकोणार्धम् = $अ_1$

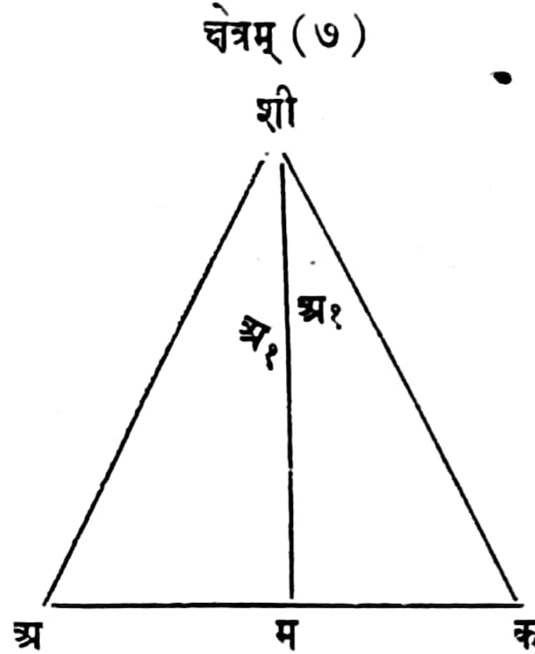
अतः स्थिरत्रिभुजशीर्षकोणार्धज्या = $ज्याअ_1$

अथ स्थिरत्रिभुजीयशीर्षकोणार्धकोज्या = $कोज्याअ_1$

अतः एतत्कोणार्धस्पर्शरेखावर्गः

$$\frac{ज्या^2 अ_1}{कोज्या^2 अ_1}$$

क्षेत्रम् (७)



अधुना भङ्ग्यन्तरेण

स्थिरत्रिभुजशीर्षकोणः = १८० – (अ + क)

अतः शीर्षकोणः + अ + क = १८०

अतः शीर्षकोणः = १८० – (अ + क)

परञ्च शीर्षकोणः = २ अ१

अतः २ अ$_1$ = १८० − (अ + क)

अतः अ$_1$ = ९० − (अ + क) / २

अतः (अ + क) / २ = ९० − अ$_1$ = कोटिअ$_1$

अत्र स्थिरत्रिभुजस्याधारकोणद्वयस्य योगार्धम्

= (अ + क) / २ = कोअ$_1$

कल्प्यतेऽन्तरार्धम् = र

अतः संक्रमणेन प्रत्येककोणद्वयम् क = कोअ$_1$ + र ।

अ = कोअ$_1$ − र ।

ज्याअ × ज्याक = ज्या (कोअ$_1$ + र) × ज्या (कोअ$_1$ − र)

प्रथमम् ।

ज्याक = ज्या (कोअ$_1$ + र)

= ज्याकोअ$_1$ × कोज्यार + ज्यार × कोज्याकोअ$_1$

परमत्र ज्याकोअ$_1$ = कोज्याअ$_1$

कोज्याकोअ$_1$ = ज्याअ$_1$

अतः ज्याक = कोज्याअ$_1$ × कोज्यार + ज्यार × ज्याअ$_1$ (१)

एवमत्र ज्याअ = ज्याकोअ$_1$ × कोज्यार − ज्यार × कोज्याकोअ$_1$

वा, = कोज्याअ$_1$ × कोज्यार − ज्यार × ज्याअ$_1$ (२)

अतः

ज्याक × ज्याअ = (कोज्याअ$_1$ × कोज्यार + ज्यार + ज्याअ$_1$)

× (कोज्याअ$_1$ × कोज्यार − ज्यार × ज्याअ$_1$)

योगान्तरघातो वर्गान्तरसमानस्ततः

= कोज्या^{2}अ$_1$ × कोज्या^{2}र − ज्या^{2}र × ज्या^{2}अ$_1$

= कोज्या^{2}अ$_1$ (१ − ज्या^{2}र) − ज्या^{2}र (१ − कोज्या^{2}अ$_1$)

= कोज्या^{2}अ$_1$ − कोज्या^{2}अ$_1$ × ज्या^{2}र − (ज्या^{2}र − ज्यार × कोज्या^{2}अ$_1$)

= कोज्या^{2}अ$_1$ − कोज्या^{2}अ$_1$ × ज्या^{2}र − ज्या^{2}र + ज्या^{2}र × कोज्या^{2}अ$_1$

समयोर्नाशात्

ज्याक × ज्याअ = कोज्या^{2}अ$_1$ − ज्या^{2}र (३)

अथ पूर्वोक्तविषमीकरणम्

कोज्या^{2}अ$_1$ >< ज्याअ × ज्याक (अ)

(३) एतस्योत्थापनेन विषमीकरणे

कोज्या^{2}अ$_1$ >< कोज्या^{2}अ$_1$ − ज्या^{2}र

समशोधनेन

० >< − ज्या^{2}र

समयोजनेन

ज्या^{2}र >< ०

अतः ज्या^{2}र > ०

अत्र प्रत्यक्षमेव वामपक्षोऽधिको दक्षिणपक्षतः परमत्र वामपक्षे पूर्णज्याधारत्रिभुजशीर्षकोणार्धस्पर्शरेखावर्ग आसीत्। दक्षिणपक्षस्थितस्थिरत्रिभुजशीर्षकोणार्धस्पर्शरेखावर्ग आसीत् ।

अयमेव सप्तमः सिद्धान्तः।

अतोऽत्र पूर्णज्याधारसमद्विबाहुकत्रिभुजस्य शीर्षकोणार्धस्पर्शरेखावर्गोऽधिकः सिद्धः स्थिरत्रिभुजीयशीर्णकोणार्धस्पर्शरेखावर्गात् ।

मूलात् पूआशीकोस्प $\frac{}{२}$ > स्थिरत्रिभु.शी.कोस्परे $\frac{}{२}$

स्पर्शरेखाखण्डैश्चापकरणेन

पूआ.स.द्वि.शीको $\frac{}{२}$ > स्थिरत्रिशीको $\frac{}{२}$

द्विगुणेन सुतराम् ।

अतः पूर्णज्याधारसमद्विभुजशीर्णकोणः स्थिरत्रिभुजीयशीर्णकोणादधिकः सिद्धः ।

अतो भगोले एतत्कोणद्वयसंमुखचापेऽपि पूर्वोक्तदिशैव न्यूनाधिके स्तः। अर्थात् पूर्णज्याधारसमद्विभुजशीर्षलग्नकोणसंमुखचापं स्थिरत्रिभुजीयशीर्षकोणसंमुखचापात् भगोलेऽधिकं स्यात्।

परमिदं पूर्णज्याधारचापं स्थिरत्रिभुजीयचापार्धबिन्दुगतं भवेत्। यतः इयं पूर्णज्या तु स्थिरत्रिभुजीयशीर्षकोणस्यार्धकर्त्री रेखा मूलगता। परमियं कोणार्धकर्त्री रेखा यत्र भगोले लगेत् तत्रावश्यमेवेयं रेखा स्थिरत्रिभुजीयशीर्षकोणसंमुखचापमर्धयेत्। अर्थात् स्थिरत्रिभुजीयचापस्यार्धबिन्दौ गच्छेत्। परमियं रेखा पूर्णज्यार्धबिन्दुगता पूर्णज्यात्रिभुजधरातलस्थिरत्रिभुजधरातलयोगरेखा। तथा च पूर्णज्याधारमप्यर्धयति स्थिरत्रिभुजादुभयतः। ततोऽवश्यमेवेयमेव रेखा पूर्णज्यासंमुखभगोलीयचापमप्यर्धयेत्। अत एवेयमेव रेखा यत्र भगोले लगेत् तत्रैव पूर्णज्याधारत्रिभुजशीर्षकोणसंमुखभगोलीयचापं स्थिरत्रिभुजीयशीर्षगतकोणसंमुखचापेन परस्परमर्धितं भवेत्। द्वे एव चापे तत्रैवार्धिते संलग्ने च भवेताम्।

एते च चापे परस्परं लम्बरूपे भवेतामित्यस्यापि निर्णयः क्रियते।

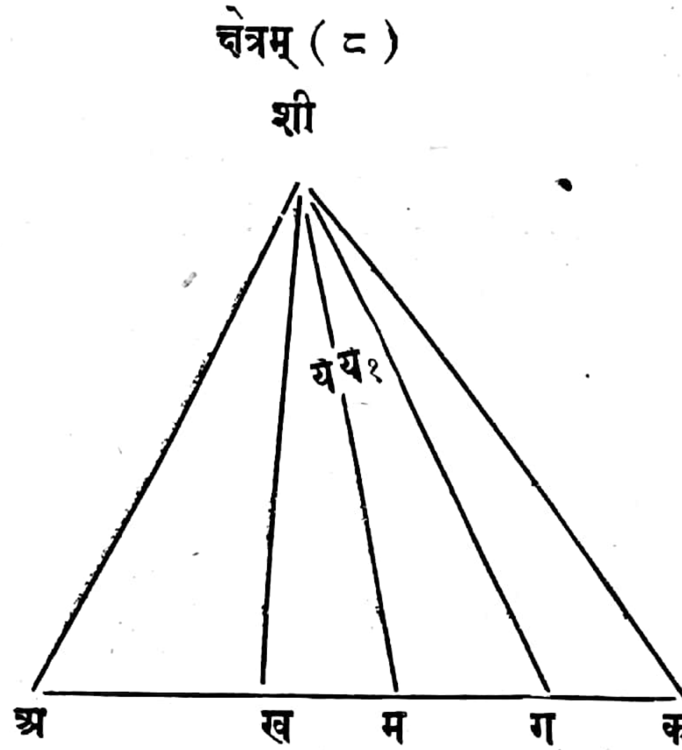
प्रथमं स्थिरत्रिभुजगता या सूच्याधारवृत्ते लम्बरेखा भवेत् तन्मूलात् स्थिरत्रिभुजीयव्यासरेखोपरि लम्बरूपा आधारवृत्तधरातलगता रेखा पूर्णज्या क्रियते। सा पूर्णज्या स्थिरत्रिभुजीयव्यासरेखा तद्धरातललम्बरेखा योगबिन्दौ लम्बरूपा। ततः स्थिरत्रिभुजधरातले सा पूर्णज्या लम्बरूपा जाता।

एतस्या पूर्णज्यायाः एव समानान्तरा स्थिरत्रिभुजीयशीर्षकोणार्धकर्त्री रेखा मूलगता पूर्णज्या। यस्याः संमुखं पूर्वोक्तचापं वर्तते। अत एवेयमपि कोणार्धकर्त्री रेखा मूलगता पूर्णज्या स्थिरत्रिभुजधरातलोपरि लम्बरूपा भवेत्। परमेतस्या एव पूर्णज्यायाः समानान्तरा भगोलेऽपि उक्तचापपूर्णज्या भवेत्। यतः इदं समद्विबाहुकत्रिभुजं ग्रहगोलीयविमण्डलीयपूर्णज्याधारम्। एतस्य त्रिभुजस्य यत्र समानौ कर्णौ लगेताम् भगोले तत्रैवैतत्कर्णद्वयव्याप्तं चापं पूर्वोक्तम्। यत्र तौ भगोले लगेताम् ततः त्रिभुजशीर्षभूकेन्द्रं यावद् प्रत्येकं भुजद्वयं त्रिज्यातुल्यम्।

ततस्त्रिज्याग्रगतभगोलीयपूर्णज्या ग्रहगोलीयपूर्णज्यायाः पूर्वोक्तायाः समानान्तरा भवेत् । समानान्तरत्वात् इयमपि भगोलीयपूर्णज्या स्थिरत्रिभुज-धरातले लम्बरूपा सिद्धा । अत एव "या रेखा भूतले लम्बः" इत्यादिना तद्धरा-तलमपि स्थिरत्रिभुजधरातले लम्बरूपम् । अतः भगोले पूर्णज्याधारचापमपि स्थिरत्रिभुजीयचापोपरि लम्बरूपं भवेत् ।

अतः पूर्वोक्ते द्वे चापे परस्परमर्धिते तथा च लम्बरूपे अपि भवेताम् । एतेन एते द्वे चापे एव एकं लघुव्यासः द्वितीयश्च बृहद्व्यासः वक्रस्य भवेताम् । परमत्र निर्णयो जातः स्थिरत्रिभुजीयचापमल्पम् पूर्णज्याधार-ज्यापमधिकम् । ततः स्थिरत्रिभुजीयचापम् = लघुव्यासः । पूर्णज्याधार-चापम् = बृहद्व्यासः ।

क्षेत्रम् (८)



अथात्र अशीक स्थिरत्रिभुजं, शीम = शीर्षकोणार्धकर्त्री रेखा ।

अथ च शीखशीगरेखे मध्यगतरेखया प्रत्येकं समानकोणं य तुल्यमुभयदिशि उत्पादयन्त्यौ वर्तेते । तथा सति स्थिरत्रिभुजीयव्यासस्य ख-गबिन्दुभ्यां ये व्यासोपरि पूर्णज्ये भवेताम् तत्राधारे ये समद्विबाहुकत्रिभुजे

भवेताम् तयोः शीर्षकोणौ समानौ भवेताम् । तदभिमुखे चापे श्रक्रपाल्यां स्थानद्वये संलग्ने समाने भवेताम् । अथ च स्थिरत्रिभुजधरातलगतलघु-व्यासोपरि लम्बरूपे भवेताम् ।

एतत्य विचारः क्रियते ।

अथेष्टरेखा शीखशीमरेखाभ्यां जायमानः = य । तथैव शीगशीम-रेखाभ्यां जायमानकोणोऽपि = $य_१$ कोणद्वयं समानम् ।

ततः अशीखत्रिभुजे

$$= \frac{अख \times ज्याअ}{ज्या(अ_१ - य)} = शीख \quad (१)$$

एवमेव शीखकत्रिभुजे

$$\frac{खक \times ज्याक}{ज्या(य + अ_१)} = शीख \quad (२)$$

(१) (२) अनयोः = समीकरणयोर्घातः

$$शीख^2 = \frac{अख \times कख \times ज्याअ \times ज्याक}{ज्या(अ_१ - य) \times ज्या(अ_१ + य)}$$

परञ्च अख × कख = ख बिन्दुगतपूर्णज्यार्धवर्गसमानः रेखागणितेन ।

$$अत्रत्य\ पूर्णज्यार्धमानम् = \frac{पू}{२}$$

$$अतः \frac{\left(\frac{पू}{२}\right)^2 \times ज्याअ \times ज्याक}{ज्या(अ_१ - य) \times ज्या(अ_१ + य)} = शीख^2$$

एवमेवान्यदिशि एतत्कोण (य) समानकोण ($य_१$) कर्त्री रेखा शीग-रेखा । ततस्तत्रत्य (ग) बिन्दुगतपूर्णज्यार्धवलेन शीग²

$$= \frac{\frac{पू_१}{२} \times ज्याअ \times ज्याक}{ज्या(अ_१ - य) \times ज्या(अ_१ + य)}$$

अथ (ग) बिन्दुगतपूर्णज्या स्वरविशिष्टा गृह्यते = $पू_{१}$ । अतः पूर्व-स्वरूपे $\frac{पू_{१}}{२}$ भवति ।

अथाधुना प्रथमपूर्णज्याधारे समद्विबाहुकत्रिभुजे तस्य शीर्षकोणार्धस्पर्श-रेखावर्गः आनीयते ।

$$\text{प्रथमपूर्णज्याधारशी}\frac{\text{को}}{२}\text{स्प}^{2} = \frac{\left(\frac{पू}{२}\right)^{2}}{\text{शीख}^{2}}$$

अत्रापि त्रि = १

अत्र शीख² उत्थापनेन

$$\text{पू.आ.त्रिशी}\frac{\text{को}}{२}\text{स्प}^{2} = \frac{\left(\frac{पू}{२}\right)^{2}\times\text{ज्या}(\text{अ}_{१} - \text{य})\times\text{ज्या}(\text{अ}_{१} + \text{य})}{\left(\frac{पू}{२}\right)^{2}\times\text{ज्याअ}\times\text{ज्याक}}$$

$$\text{पू.आ.त्रिशी}\frac{\text{को}}{२}\text{स्प}^{2} = \frac{\text{ज्या}(\text{अ}_{१} - \text{य})\times\text{ज्या}(\text{अ}_{१} + \text{य})}{\text{ज्याअ}\times\text{ज्याक}} \quad (३)$$

एवमेव गबिन्दुस्थपूर्णज्याधारत्रिभुजशीर्षकोणार्धस्पर्शरेखावर्गः

$$\text{पू}_{१}\ \text{आ.त्रिशी}\frac{\text{को}}{२}\text{स्प}^{2} = \frac{\left(\frac{पू_{१}}{२}\right)^{2}\times १}{\text{शीग}^{2}} \quad \{\text{त्रि} = १,$$

परञ्च

$$\text{शीग}^{2} = \frac{\frac{पू^{2}}{२}\times\text{ज्याअ}\times\text{ज्याक}}{\text{ज्या}(\text{अ}_{१} + \text{य}_{१})^{2}\times\text{ज्या}(\text{अ}_{१} - \text{य}_{१})}$$

अत उत्थापनेन

स्वरविशिष्ट पू१ आ.समद्विभुजशीर्षकोणार्धस्पर्शवर्गः

$$\text{पू}_{१}\ \text{आ.सद्विशीकोस्प}^2_{\frac{}{२}} = \cfrac{\left(\frac{\text{पू}_{१}}{२}\right)^2}{\cfrac{\left(\frac{१\text{प}}{२}\right)^2 \times \text{ज्याअ} \times \text{ज्याक}}{\text{ज्या}(\text{अ}_{१} + \text{य}_{१}) \times \text{ज्या}(\text{अ}_{१} - \text{य}_{१})}}$$

$$\text{पू}_{१}\ \text{आ.शीकोस्प}^2_{\frac{}{२}} = \frac{\text{ज्या}(\text{अ}_{१} + \text{य}_{१}) \times \text{ज्या}(\text{अ}_{१} - \text{य}_{१})}{\text{ज्याअ} \times \text{ज्याक}} \quad (४)$$

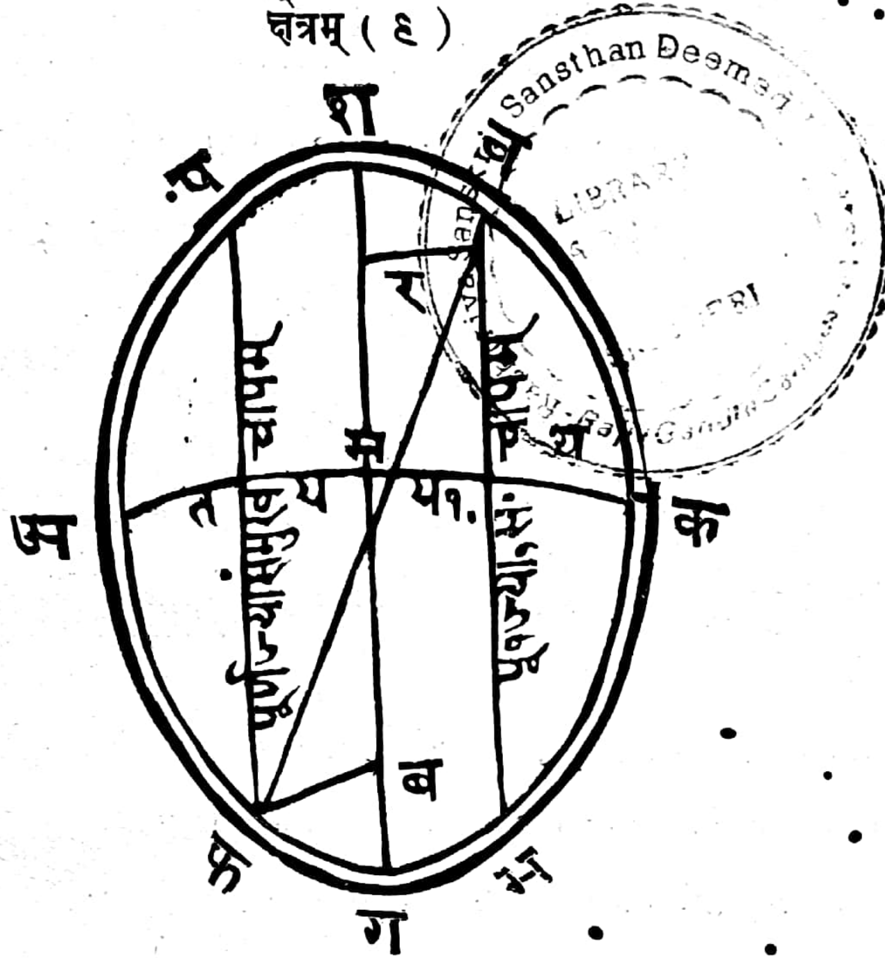
तृतीयचतुर्थयोः (३) (४) अनयोः समीकरणयोः सर्वे पदार्थाः समानाः। केवलं य, य१ अनयोर्भेदो दृश्यते। परञ्च पूर्वनियमेन सिद्धान्तनियमेन च य= य१ अतः इमौ स्पर्शवर्गौ समानौ स्तः। मूलग्रहणेन स्पर्शरेखे अपि समाने भवेताम्। चापग्रहणेन पूर्णज्याद्वयस्याधारसमद्विभुजत्रिभुजयोः शीर्षकोणार्धे समाने जाते। तद्द्विगुणनेन तयोस्त्रिभुजयोः शीर्षकोणावपि समानौ जातौ। एतत्पूर्णज्याद्वयस्याधारत्रिभुजद्वयस्य कर्णद्वयं त्रिज्यागोलेऽपि लगेत्। तदा क्रान्तभगोले चापद्वयं वक्रीयपूर्णचापद्वयमपि समानशीर्षकोणद्वयस्य संमुखत्वात् समानम्। अथ च पूर्णज्याद्वयं पूर्वयुक्त्यैव स्थिरत्रिभुजधरातले लम्बरूपम्। एतयोरेव पूर्णज्ययोः प्रत्येकत्रिभुजे भगोलीये अपि पूर्वोक्तवक्रीयचापद्वयस्य पूर्णज्ये भूकेन्द्ररूपशीर्षस्थानात् त्रिज्याग्रे स्थितत्वात् समानान्तरे भवेताम्। तत इमे अपि भगोलीयपूर्णज्ये स्थिरत्रिभुजधरातले लम्बरूपे। ततः "या रेखा भूतले लम्बस्तद्गताः ये धरातला" इत्यादिना पूर्णज्याद्वयचापभववृत्ते अथ वा ते चापे अपि स्थिरत्रिभुजधरातलीयचापरूपलवुव्यासोपरि लम्बरूपे सिद्धे। अथ च शीर्षकोणार्धगत–मशीरेखया समानकोणद्वयं (य, य१) कर्त्र्यौ (शीख, शीम) रेखे अपि तुल्यचापद्वय (य, य१) तुल्यान्तरिते भगोले मध्यस्थानतः लगेताम्।

अयमष्टमः सिद्धान्तः सम्पन्नः (८)

इतः परं वक्रस्य स्वरूपं प्रदर्श्यते। अनुमानेनेदं वक्रं कूर्मपृष्ठाकृति सिद्ध्यति। अथ चानेकधरातलीयं गौलिकदीर्घवृत्तमिवेति।

कूर्मपृष्ठाकृति अथ वा गौलिकदीर्घवृत्तं वक्रमिदं वक्तुं शक्यते—

चित्रम् (६)



अथ. पूर्वोक्तसिद्धान्तजालैः विमण्डलवक्रस्यावयवाः स्फुटीक्रियन्ते—

अथ स्थिरत्रिभुजशीर्षकोणसंमुखचापं भगोले वक्रस्य लघुव्यासः सिद्धः। तस्मात् चापात् उभयदिशि वक्रस्य समानं खण्डद्वयं जातम्। यतः तल्लघुव्यासोपरि प्रत्येकस्थिरत्रिभुजीयव्यासोपरि लम्बरूपपूर्णज्यासंमुखचापं भगोले लम्बरूपं सिद्धम्। अथ चार्धितमपि लघुव्यासेन एतेन निश्चितं यत् अवश्यमेवानेन व्यासेन वक्रमर्धितम्। अतः अयं व्यासः वक्रमध्यगतश्च।

अथ च स्थिरत्रिभुजस्य शीर्षकोणार्धकर्त्री रेखा स्थिरत्रिभुजव्यासे यत्र लग्ना सैव च रेखा भगोले यत्र लगति स एव लघुव्यासस्य मध्यस्थबिन्दुः = म। यतोऽर्धकोणसंमुखं चापद्वयं प्रत्येकं समानं समानम्—लघु व्यासार्धम् = मक =मअ। यतोऽत्र मया स्थिरत्रिभुजीयकर्णाभ्यां माक्रान्तं चापं लघुव्यासरूपम्= अक वक्रे वर्तते। एतन्मध्यस्थबिन्दुत एव लम्बरूपं यच्चापम् पूर्वसिद्धान्तेन सिद्धं तदेव चापमधःस्थानीयपूर्णज्यासंमुखं भगोले शगसंज्ञकं वक्रे

वर्तते। शगचापमपि पूर्वसिद्धान्तेन अकचापोपरि लम्बरूपं सिद्धम्। अथात्र तत एव (म)विन्दुतः पूर्णज्यासंमुखचापमर्धितमप्यस्ति अर्थात् ततो (म)-विन्दुतः मश, मगचापं बृहद्व्यासार्द्धसमानम्, यथा मश = मग। अथ स्थिरत्रिभुजीयशीर्षकोणार्धगतरेखातः उभयपार्श्वे य, य१ तुल्यान्तरितं यत्र भगोले शीख, शीग-रेखाद्वयं लग्नं तद्विन्दुद्वयमवश्यमेव कोणार्धगतरेखास्थ-(म)विन्दुतः तुल्यान्तरे भवेत्। तदेव वक्रे य, य१ चापद्वयमस्ति। अतो भगोले लघुव्यासस्य (म)विन्दुतः उभयदिशि चापखण्डं (य, य१) संज्ञकद्वयं समानम्। तत्रैव तच्चापद्वयाग्रगतपूर्णज्याधारचापद्वयमपि पूर्व-सिद्धान्तेन क्रमेण समानम्। अर्थात् वभ = पफ एतद्द्वयमपि पूर्वसिद्धान्तेनैव लघुव्याससंज्ञकचापेनार्धितं तथा च लघुव्यासोपरि लम्बरूपं सिद्धम्। एतेने-दमपि सिद्धं यत् (म)विन्दुस्थानतः यद्यत् पूर्णज्यासंमुखचापद्वयं तुल्यान्तरितं तत्समानद्वयं द्वयं भवेत्। एतेनेदमपि निश्चीयते यत् एतस्य वक्रस्य बृहद्-व्याससंज्ञक (शग)चापादुभयदिशि समानानि समसंख्यकानि च सर्वाणि पूर्णज्यासंमुखचापानि भवेयुरेतेन तैस्तैरुभयदिशिगतैः पूर्णज्याचापैरेकत्री-भूतैश्च (शग)चापतः उभयदिशि वक्रमर्धितं भवेत्। एतेन (शग)चापमपि वक्रमर्धयति (म)मध्यविन्दुगतमपि पूर्वसिद्धान्तेन लघुव्यासादधिकमपि अतो वक्रस्येदं चापम् (शग)बृहद्व्यासः सिद्धः।

अथ वक्रे उभयपार्श्वे समाने लघुव्यासोपरि लम्बरूपे चापे गृहीते क्रमेण पफ, बभसंज्ञके। अथाधुना (फम,बम)चापद्वयं बद्धम्। तेन त्रिभुज-द्वयमुत्पन्नम्। एकम् = तफम त्रिभुजम् द्वितीयम् = बमथ त्रिभुजमिति त्रिभुजद्वयं जात्याख्यम्। अत्र त्रिभुजद्वये मत = मथ, य, य१ चापसमत्वात्। तफ = बथ चापे समाने। यतः पूर्वसिद्धान्तेन (म)स्थानतस्तुल्यान्तरे पूर्णज्याचापे समाने भवतः। अत्र त्रिभुजद्वये ∠त, ∠थ कोणद्वयं समकोणम् पूर्वयुक्त्यैव। अत्र इमे त्रिभुजे गोलीयरेखागणितयुक्त्या अथ वा चापीयत्रिकोणमित्या च सर्वथा समाने भवेताम्। एतेन बमथ कोणः तमफ कोणेन समानो भवेत्।

अर्थात् ∠बमथ = ∠तमफ तथा सति (बम फम्) चापे एकस्मिन्नेव मार्गे भवेताम्। अथ वा कथ्यतां (बम) चापं वर्धितं सत् (फ)विन्दाववश्यमेव गच्छेत्। एतेनेदमपि (बफ) चापमस्मिन्नेव (म)विन्दावर्धितम् । (म)विन्दुश्च वक्रकेन्द्रं भवेत् । अतः इदमपि सिद्धं यत् अस्मात् (म)विन्दुतः उभयदिशि यत्र कुत्रापि भागे गृह्यमाणानि सर्वाणि चापानि अर्धितानि भवेयुः । अर्थात् एतानि चापानि दीर्घवृत्तवत् इष्टव्याससंज्ञकानि वक्तुं शक्यन्ते ।

अधुना (ब)बिन्दुतः (मश)व्यासार्धोपरि वर चापं लम्बरूपं कृतम् । अथ च (फ)बिन्दुतः मग बृहद्व्यासार्धोपरि लम्बरूपम् (फब)चापं कृतम् । इमावपि लम्बौ फल = वर । चापीयत्रिकोणमित्याऽवश्यमेव समानौ । अत एव सरल-दीर्घवृत्तवत् एतच्चापीयं कोटिद्वयं बृहद्व्यासार्धोपरि लम्बरूपं वक्तुं शक्यते। अथ च पूर्णज्यार्धसंमुखचापं च लघुव्यासोपरि लम्बत्वात् चापीयभुजमान-मपि वक्तुं शक्यते । एवमत्र बहवः सिद्धान्ताः सरलदीर्घवृत्तवत् घटन्ते । विवेचनया घटिष्यन्त अपि किमत्र विशेष लेखेन ।

